5C-44

Lineare Algebra II: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2022

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Hessenormalformen der folgenden affinen Hyperebenen.

(a) $L := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(b) $P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 1
(Seite 3)

Aufgabe 1

Aufgabe 2

(a) Seien a und b Elemente eines Integritätsrings. Definieren Sie, was es bedeutet, dass a und b *teilerfremd* sind.

(b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $c \in \mathbb{Z}$ der folgenden beiden ganzen Zahlen:

$$a := 314$$
$$b := 94$$

Sind die beiden Zahlen teilerfremd?

(c) Bestimmen Sie ganze Zahlen p und q, sodass für die Zahlen a, b und c aus (b) gilt: $pa + qb = c$.

(d) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $C \in \mathbb{R}[X]$ der folgenden beiden reellen Polynome:

$$A := X^4 + 7X^3 + 6X^2 + X + 6$$
$$B := X^3 + 7X^2 + 6X$$

Sind die beiden Polynome teilerfremd?

(e) Bestimmen Sie reelle Polynome P und Q, sodass für die Polynome A, B und C aus (d) gilt: $PA + QB = C$.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2
(Seite 7)

Aufgabe 3

(a) Formulieren Sie die aus der Vorlesung bekannte Bedingung an das Minimalpolynom einer Matrix, unter der die Matrix diagonalisierbar ist.

(b) Berechnen Sie zu jeder der folgenden reellen Matrizen das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Geben Sie zu jeder Matrix in (b) an, ob eine Jordannormalform über $\mathbb{R}$ existiert, und geben Sie gegebenfalls auch eine solche Jordannormalform an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3
(Seite 13)

Aufgabe 4

Gegeben ist die folgende reelle Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert a den Hauptraum $\mathrm{Hau}(A; a)$.

(d) Bestimmen Sie eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^n$ für A. Geben Sie ferner die zugehörige Jordannormalform $\hat{A}$ von A an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4

Aufgabe 4
(Seite 17)

Aufgabe 5

Kreuzen Sie in den folgenden sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Ein Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

☐ Das Minimalpolynom von f zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

☐ Das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren.

☐ Das Minimalpolynom von f stimmt bis auf ein Vorzeichen mit dem charakteristischen Polynom von f überein.

(2) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Ist a ein Eigenwert von f mit **algebraischer Vielfachheit** m, so gilt:

☐ Das charakteristische Polynom χ_f hat die Form $\chi_f(X) = (X - a)^m \cdot P(X)$, wobei P ein zu $X - a$ teilerfremdes Polynom ist.

☐ Das Minimalpolynom μ_f hat die Form $\mu_f(X) = (X - a)^m \cdot P(X)$, wobei P ein zu $X - a$ teilerfremdes Polynom ist.

☐ Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(f; a)$ hat Dimension $\geq m$.

(3) Für jeden endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V gilt:

☐ Jede Basis von V ist eine Orthonormalbasis.

☐ Es gibt, bis auf Reihenfolge der Vektoren, genau eine Orthonormalbasis von V.

☐ Mindestens eine Basis von V ist eine Orthonormalbasis.

(4) Für eine **Isometrie** $f\colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraums V gilt:

☐ Alle Eigenvektoren haben Länge 1.

☐ f ist injektiv.

☐ Der einzige Eigenwert von f ist 1.

(5) Für jede reelle symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt:

☐ Für jeden Eigenwerte a von A ist auch $-a$ ein Eigenwert von A.

☐ Die durch A definierte Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Skalarprodukt.

☐ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen senkrecht zueinander (bezüglich des Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$).

(6) Die folgenden Ringe sind Integritätsringe:

☐ $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation)

☐ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Aufgabe 6

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ und W ein K-Vektorraum mit Basis $C = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m)$. Seien $B^* = (\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*)$ und $C^* = (\mathbf{c}_1^*, \ldots, \mathbf{c}_m^*)$ die jeweils dualen Basen von V^* und W^*.

(a) Geben Sie die Definition von B^* an.

(b) Geben Sie eine Basis von $V^* \otimes W^*$ an, und konstruieren Sie eine Basis von $(V \otimes W)^*$.

(c) Zeigen Sie, dass zu Linearformen $\varphi \in V^*$ und $\psi \in W^*$ eine eindeutige Linearform

$$L_{\varphi,\psi} \in (V \otimes W)^*$$

existiert, die reine Tensoren $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in V \otimes W$ abbildet auf $\varphi(\mathbf{v}) \cdot \psi(\mathbf{w}) \in K$.

(d) Geben Sie einen kanonischen, also von Basiswahl unabhängigen, Isomorphismus

$$V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$$

an. Weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um einen Isomorphismus handelt.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 6
(Seite 21)